3. Introdução à Álgebra Linear

3.1 Primeiros conceitos

Os conceitos de vetores, espaços vetoriais, base e dimensão são úteis para a compreensão da representação de sinais no domínio da frequência. Nesta sessão, faremos uma breve revisão de conceitos básicos da Álgebra Linear.

Definição 3.1.1 — VETORES. Um vetor é um arranjo de elementos em uma linha, ou coluna, sendo chamado de vetor-linha, ou vetor-coluna, respectivamente. O número de elementos do vetor define sua *dimensão*. Para o propósito deste curso, consideraremos que os elementos dos vetores são números reais.

Exemplo 3.1

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, (n \times 1).$$

■

Exemplo 3.2

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}, (1 \times m).$$

■

A representação de um vetor é feita usualmente usando letras minúsculas em negrito. O símbolo ^{T} representa a transposta de vetor:

Exemplo 3.3

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

■

3.1.1 Operação com vetores

Definição 3.1.2 — ADIÇÃO. Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ dois vetores de mesma dimensão. A adição é dada pela soma dos elementos na forma:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = [a_i + b_i] = \boldsymbol{c} = [c_i]. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.4

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2,5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 3.1.3 — MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR. Seja k um escalar e $\boldsymbol{a}$ um vetor. Então o produto é representado por:

$$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} = [ka_i] = [b_i]. \tag{3.2}$$

Exemplo 3.5

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 3.1.4 — PRODUTO INTERNO. Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ dois vetores de dimensão $(n \times 1)$. O produto interno produz um escalar que é definido por:

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3+6+5+4 = 19.$$

■

Dois vetores são chamados *ortogonais* quando o produto interno entre eles for igual a zero. Outras notações para produto interno são:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \text{ ou } < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \tag{3.4}$$

Definição 3.1.5 — NORMA DE UM VETOR. A magnitude de um vetor é dada pela raiz quadrada do produto interno dele com ele mesmo:

$$\| \boldsymbol{a} \| = \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \tag{3.5}$$

Propriedades do produto escalar.
Se X, Y e Z são vetores de $\mathbb{R}^n$ e α é um escalar, então

a. $X \cdot Y = Y \cdot X$ (comutatividade);
b. $X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ (distributividade em relação à soma);
c. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;
d. $X \alpha X = \| X \| 2 \geq 0 e \| X \| = 0$ se, e somente se, $X = 0$;
e. $\| X \| = |\alpha| \, \| X \|$;
f. $|X \cdot Y| \leq \| X \| \| Y \|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz);
g. $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$ (desigualdade triangular).

Definição 3.1.6 — PRODUTO EXTERNO. Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ dois vetores de dimensão $(n \times 1)$. O produto externo entre eles produz uma matriz $(n \times n)$ e é definido por:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = [C_{ij}],\ c_{ij} = a_i b_j. \tag{3.6}$$

■ **Exemplo 3.7**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 & 1\cdot 2 & 1\cdot -1 & 1\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot -1 & 3\cdot 2 \\ -5\cdot 3 & -5\cdot 2 & -5\cdot -1 & -5\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot -1 & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 9 & 6 & -3 & 6 \\ -15 & -10 & 5 & -10 \\ 6 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 3.1.7 — MATRIZES. Uma matriz A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Usamos a notação $A = (a_{ij})$ para descrever o elemento de posição na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A. Se $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A. Uma matriz que só possui uma linha é chamada *matriz linha*, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada *matriz coluna*.

3.1.2 Operações com Matrizes

Vamos definir as seguintes operações matriciais:

Definição 3.1.8 — SOMA DE MATRIZES. A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B \tag{3.7}$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos também $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definição 3.1.9 — MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ POR ESCALAR. A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um escalar α é definida pela matriz $m \times n$, $B = \alpha A$ obtida multiplicando-

se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja, $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A.

Definição 3.1.10 — MULTIPLICAÇÃO ENTRE DUAS MATRIZES. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz $C = (c_{ij})_m \times n$

$$C = AB \tag{3.8}$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj},$$

para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.

Observe que o produto de matrizes não é uma operação comutativa! (Isto é, AB não é necessariamente igual a BA. Dependendo do número de colunas de B e do número de linhas de A, BA pode nem ser uma operação definida).

Definição 3.1.11 — TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ. A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^T \tag{3.9}$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$. Escrevemos também $[A^T]_{ij} = a_{ji}$.

Definição 3.1.12 — MATRIZ IDENTIDADE. Em matemática, matriz identidade é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. É denotada por I_n, onde n é a ordem da matriz, ou simplesmente por I. Ou seja, a matriz identidade I_n tem a seguinte forma:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

A matriz I_n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Mais precisamente, para qualquer matriz A, as seguintes igualdades são válidas:

$$A_{m,n} I_n = A_{m,n}$$

e

$$I_m A_{m,n} = A_{m,n}.$$

Definição 3.1.13 — INVERSA DE UMA MATRIZ. Uma matriz quadrada A é dita invertível quando existe outra matriz denotada A^{-1} tal que

$$A^{-1} \cdot A = I \tag{3.10}$$

e

$$A \cdot A^{-1} = I \tag{3.11}$$

I é a matriz identidade.

3.2 Espaços Vetoriais

A noção de espaço vetorial é a base de toda a teoria da análise de Fourier. É o terreno onde se desenvolve a Álgebra Linear. Esta seção introduz os axiomas e os conceitos de base, dependência linear e projeções ortogonais.

Um espaço vetorial E envolve quatro objetos matemáticos: dois conjuntos V e S, e duas operações algébricas chamadas adição de vetores e multiplicação por escalar (Seção 3.1.1).

- V é um conjunto não vazio de objetos denominados *vetores*.
- S é um campo escalar - pode ser o campo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$.
- Adição de vetores ($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$) é uma operação entre elementos de V.
- Multiplicação por escalar ($k\boldsymbol{a}$) é uma operação entre elementos de S e V.

A definição formal de um espaço vetorial estipula como estes quatro objetos se relacionam entre si.

Não é necessário que os vetores em V tenham interpretação geométrica. V pode ser um conjunto formado por quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas abaixo. Polinômios de grau menor ou igual a n, $n \in \mathbb{N}$ formam um espaço vetorial, por exemplo, assim como grupos de matrizes $m \times n$ e o espaço de todas as funções de um conjunto no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

3.2.1 Axiomas do espaço vetorial

a. $(u+v)+w = u+(v+w)$ para $u,v,w \in V$ (associatividade);
b. Há um elemento 0 $0 \in V$, tal que, para cada $v \in V, v+0 = 0+v = v$ (existência de elemento neutro);
c. Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v+u = 0$ (existência de elemento oposto);
d. Para cada $v,u \in V$, $u+v = v+u$ (comutatividade para a operação soma);
e. Para cada $a,b \in S$ e cada $v \in V$, $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$ (associatividade da multiplicação por escalar);
f. Se 1 é a unidade de S, então, para cada $v \in V$, $1 \cdot v = v$ (existência do elemento neutro em V);
g. Para cada $a \in S$ e cada $v,u \in V$, $a \cdot (v+u) = a \cdot v + a \cdot u$ (distributiva de um escalar em relação à soma de vetores);
h. Para cada $a,b \in K$ e cada $v \in V$, $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ (distributiva da soma de escalares em relação à um vetor);

Definição 3.2.1 — NORMAS. Uma norma consiste em uma função que a cada vetor de um espaço vetorial associa um número real não-negativo. O conceito de norma está intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento.

Dado um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$ dos números reais ou complexos, uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ é chamada de norma se, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Se esta condição não for atendida, a função será no máximo uma seminorma.

- $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$.
- $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdade triangular).

Se o espaço vetorial X tem uma norma, ele passa a ser chamado de espaço normado, $(X, \|\cdot\|)$.

■ **Exemplo 3.8** Normas ℓ_p:

- $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$;
- $\|\vec{x}\|_\infty = max(|x_i|)$;

■

■ **Exemplo 3.9** Normas L_p:
Seja $f : D \to \mathbb{C}$, uma função mensurável à Lebesgue definida em domínio D, mensurável.
Se $p \in [1, \infty)$, f é dita p-integrável e pertence ao espaço L_p se sua norma L_p for finita:

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

■

3.2.2 Tipos de espaços vetoriais

Espaço Vetorial Euclidiano. É qualquer espaço real que possui um número finito de dimensões e possui uma operação denominada produto interno.
Espaço de Hilbert. É qualquer espaço vetorial que possui uma operação denominada produto interno e cuja métrica gerada por esse produto interno o torne um espaço completo.
Espaço normado. É qualquer espaço vetorial que possui uma norma definida.
Espaço de Banach. É um espaço vetorial normado completo.

■ **Exemplo 3.10** O espaço $L^2(D)$ é um espaço de Hilbert dotado do seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g}(x)dx.$$

As funções deste espaço são chamadas de *quadrado integráveis* e assumem um papel fundamental na teoria das séries de Fourier. Os espaços L^2 são os únicos espaços de Hilbert entre os espaços L^p. ■

3.2.3 Espaços $\mathbb{R}^n$

Já vimos que os vetores no plano são identificados com os pares ordenados de números reais e que vetores no espaço são identificados com ternos ordenados de números reais. Muito do que estudamos sobre vetores no plano e no espaço pode ser estendido para n-uplas de números reais, em que n é um inteiro positivo.

Para cada inteiro positivo n, o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é definido pelo conjunto de todas as n-uplas ordenadas $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de números reais. O plano pode ser representado pelo espaço $\mathbb{R}^2$, e o espaço tridimensional pode ser representado pelo espaço $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.2.2 — COMBINAÇÃO LINEAR. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$, se existem escalares $x_1, \cdots, x_k$ que satisfazem a equação

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k = v. \tag{3.12}$$

Neste caso, dizemos também que v pode ser escrito como uma *combinação linear* de $v_1, \cdots, v_k$.

■ **Exemplo 3.11** Sejam $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,0)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. O vetor $v = (1,3,5)$ não é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$$

não possui solução. (Verifique!) ■

■ **Exemplo 3.12** Sejam $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. O vetor $v = (1,0,5)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2, pois a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$$

possui solução, a saber

$$1v_1 + 5v_2 = v$$

■

Definição 3.2.3 — INDEPENDÊNCIA LINEAR. Dizemos que um conjunto $S = v_1, \cdots, v_k$ de vetores do $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente (L.I.) quando a equação vetorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k = 0 \tag{3.13}$$

só possui a solução trivial, ou seja, se a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_k$ é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, isto é, se a Eq. 3.13 possui solução não trivial, dizemos que o conjunto S é linearmente dependente (L.D.).

Exercício 3.1 Quais dos seguintes vetores são combinação linear de $v_1 = (4,2,-3)$, $v_2 = (2,1,-2)$ e $v_3 = (-2,-1,0)$?
a) $(1,1,1)$
b) $(4,2,-6)$
c) $(-2,-1,1)$
d) $(-1,2,3)$
■

Exercício 3.2 Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes?
a) $\{(1,1,2),(1,0,0),(4,6,12)\}$
b) $\{(1,-2,3),(-2,4,-6)\}$
c) $\{(1,1,1),(2,3,1),(3,1,2)\}$
d) $\{(4,2,-1),(6,5,-5),(2,-1,3)\}$
e) $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$
■

Exercício 3.3 Para quais valores de λ o conjunto de vetores $\{(3,1,0),(\lambda 2+2,2,0)\}$ é L.D.? ■

Definição 3.2.4 — BASE E DIMENSÃO. Se E é um espaço vetorial sobre um corpo S, chama-se base de E um conjunto de vetores de E linearmente independentes que gera E.

■ **Exemplo 3.13** O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem por base o conjunto

$$\{(1,0,0,\ldots,0,0),(0,1,0,\ldots,0,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)\},$$

que se denomina a sua base canônica. ■

■ **Exemplo 3.14** O espaço vetorial dos polinômios $p(x)$ de coeficientes reais tem uma base infinita, o conjunto $\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$. ■

A cardinalidade da base define a dimensão do espaço vetorial.

■ **Exemplo 3.15** O espaço $\mathbb{R}^3$ possui dimensão finita igual a 3. ■

Quando os vetores da base são ortogonais entre si, dizemos que a base é *ortogonal*. Se, além da ortogonalidade, os vetores da base forem unitários, dizemos que é uma base *ortonormal*. A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de base ortonormal.

3.3 Projeções

A projeção ortogonal de um vetor em um subespaço é um conceito útil em várias aplicações. Para os espaços $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, podemos conceber uma interpretação geométrica do que é uma projeção ortogonal de um vetor em um subespaço. No $\mathbb{R}^3$, por exemplo, podemos pensar a projeção ortogonal como uma sombra de um vetor em um plano. O conceito de projeção e distâncias, no entanto, pode ser utilizado para qualquer espaço vetorial com produto interno. Para espaços mais genéricos, podemos assumir a seguinte definição:

Definição 3.3.1 — PROJEÇÃO ORTOGONAL. Seja E um espaço vetorial, $F \subseteq E$ um subespaço de E. Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ os vetores de uma base ortogonal de F. Então a projeção ortogonal $\hat{v}$ de $v \in E$ em F é dada por

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \tag{3.14}$$

onde $\alpha_i = \dfrac{< v, v_i >}{< v_i, v_i >}$ são os coeficientes de Fourier.

Vamos pensar em uma forma mais intuitiva de enxergar a definição acima. Imagine que se queira calcular a distância de um ponto no espaço $\mathbb{R}^3$ até o plano xy. Uma maneira de se fazer isto, é calcular a projeção ortogonal do vetor definido por este ponto no plano xy, e depois calcular a norma do vetor resultante da subtração do vetor por sua projeção.

Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortogonal de um subconjunto S. Queremos calcular a distância $\| D \|$ de um vetor $v \notin S$ até S.

Temos que

$$D = v - \hat{v},$$

$$< v - \hat{v}, x >= 0, \ \ \forall x \in S,$$

onde $\hat{v}$ é a projeção ortogonal de v em S.

Como x é uma combinação linear de elementos da base de S, temos que

$$< v - \hat{v}, v_j >= 0, \ \ j = 1, \cdots, n.$$

Logo

$$< v, v_j > - < \hat{v}, v_j >= 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Como $\hat{v} \in S$, temos que

$$\hat{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k, \tag{3.15}$$

e portanto

$$< v, v_j >=< \hat{v}, v_j >= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < v_k, v_j > . \tag{3.16}$$

Como a base é ortogonal, sabemos que $< v_i, v_j >= 0$ se $i \neq j$. Portanto

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < v_k, v_j >= \alpha_1 < v_1, v_j > + \ldots + \alpha_j < v_j, v_j > + \ldots + \alpha_n < v_n, v_j >= \alpha_j < v_j, v_j > .$$

Substituindo em (3.16), temos que

$$\alpha_j = \frac{< v, v_j >}{< v_j, v_j >}.$$

Chamamos os coeficientes α_j de *coeficientes de Fourier*.

Vamos aplicar este raciocínio em $\mathbb{R}^3$, no exemplo a seguir.

■ **Exemplo 3.16** Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ (plano yz). Para determinar a distância do vetor $v = (7,-2,3)$ ao plano S (Figura 3.1), precisamos primeiro encontrar a projeção ortogonal $\hat{v}$ de v em S, e então determinar a distância $\| D \| = \| v - \hat{v} \|$.

A projeção $\hat{v}$ é dada pela equação (3.15):

$$\hat{v} = \alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(0,0,1), \tag{3.17}$$

onde

$$\alpha_i = \frac{< v, v_i >}{< v_i, v_i >}.$$

Sabemos que

$$< v, v_1 >= (7,-2,3) \cdot (0,1,0) = -2, \tag{3.18}$$

e

$$< v, v_2 >= (7,-2,3) \cdot (0,0,1) = 3. \tag{3.19}$$

Logo

$$\hat{v} = -2v_1 + 3v_2 = (0,-2,3). \tag{3.20}$$

Portanto,

$$D = v - \hat{v} = (7,-2,3) - (0,-2,3) = (7,0,0) \tag{3.21}$$

■

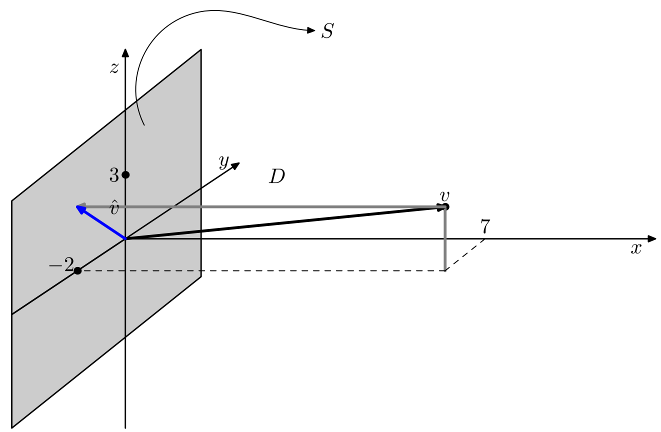


Figura 3.1: Projeção ortogonal $\hat{v}$ (em azul) de $v = (7,-2,3)$ em S. O vetor $D = v - \hat{v}$ possui norma igual à distancia de v a S.

Exercício 3.4 Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Determine a distância do vetor $v = (10,-1,2)$ ao plano S. ■

Exercício 3.5 Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{(1,0,0)\}$. Determine a distância do vetor $v = (10,-1,2)$ à reta S. ■

Exercício 3.6 Mostre que:

a $\int_{-\pi}^{\pi} |sen(nx)|^2 dx = \pi$, para $n = 1,2,\cdots,N$;

b $\int_{-\pi}^{\pi} |cos(nx)|^2 dx = \pi$, para $n = 1,2,\cdots,N$;

c $\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx) dx = 0$, para $m \neq n$;

d $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx) dx = 0$, para $m \neq n$.

■

■ **Exemplo 3.17** Seja E o espaço de todas as funções quadrado integrável em $[-\pi,\pi]$

$$E = \left\{ g : [-\pi,\pi] \to \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

onde

$$< p, q >= \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)dx,$$

$$\|p\| = \int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|^2 dx.$$

Sabendo que as funções $sen(nx)$ e $cos(nx)$ são ortogonais entre si, vamos escolher um subespaço $F \subseteq E$, cuja base é dada por

$$B = \{1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x), \cdots, cos(Nx), sen(Nx)\}.$$

Observe que a dimensão de F é igual a $2N+1$. Qualquer elemento g_N de F é uma combinação linear dos elementos da base B:

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n sen(nx).$$

Se g_N é a projeção ortogonal de $g \in E$, então a_n e b_n são os coeficientes de Fourier, e são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)cos(nx)dx \tag{3.22}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)sen(nx)dx, n = 1, 2, \cdots, N \tag{3.23}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \tag{3.24}$$

e logo

$$g_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n cos(nx) + b_n sen(nx).$$

■

■ **Exemplo 3.18** Tome a função $f : [-1,1] \to [0,1]$. f pertence ao espaço E das funções quadrado integráveis.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{se } 1 \leq t < 0 \\ 1 & , \text{se } 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

Sabemos que o conjunto

$$B = \{1, cos(\pi t), sen(\pi t), \ldots, cos(n\pi t), sen(n\pi t)\}, n = 1, 2, \ldots, N$$

forma uma base para o subespaço $S \subset E$.

Para calcularmos os coeficientes de Fourier

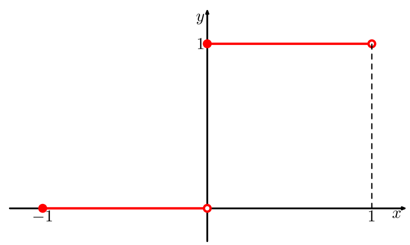


Figura 3.2: Gráfico da função f.

$\alpha_n = \dfrac{\langle f(t), cos(n\pi t)\rangle}{\langle cos(n\pi t), cos(n\pi t)\rangle}$ e $\beta_n = \dfrac{\langle f(t), sen(n\pi t)\rangle}{\langle sen(n\pi t), sen(n\pi t)\rangle}$, utilizamos os seguintes resultados:

$$\langle f(t), cos(n\pi t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)cos(n\pi t)dt = \int_{0}^{1} cos(n\pi t)dt = \begin{cases} 1 & , \text{se } n = 0 \\ 0 & , \text{se } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\langle cos(n\pi t), cos(n\pi t)\rangle = \int_{-1}^{1} cos(n\pi t cos(n\pi t)dt = \begin{cases} 2 & , \text{se } n = 0 \\ 1 & , \text{se } n \geq 1. \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\langle f(t), sen(n\pi t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)sen(n\pi t)dt = \int_{0}^{1} sen(n\pi t)dt = \begin{cases} 0 & , \text{se n é par;} \\ \frac{2}{n\pi} & , \text{se n é ímpar.} \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\langle sen(n\pi t), sen(n\pi t)\rangle = \int_{-1}^{1} sen(n\pi t)sen(n\pi t)dt = 1. \tag{3.29}$$

Logo, a projeção de f em S é dada por:

$$f_{2N+1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi(2n-1)} sen(\pi(2n-1)t). \tag{3.30}$$

Observe que na descontinuidade em $t = 0$, $f_{2N+1}(0) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$. ■

O exemplo acima ilustra a ideia das somas parciais da Série de Fourier. Por exemplo, considere $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ uma função quadrado integrável. Considere também o subespaço gerado por

$$B = \{e^{\frac{2\pi i 0 t}{T}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i k t}{T}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i n t}{T}}\}. \tag{3.31}$$

A soma parcial f_N da série de Fourier da função $f(t)$ pode ser vista como a projeção de f no subespaço gerado por B (3.31), dado por:

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}, \tag{3.32}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{\frac{-2\pi i n t}{T}}dt. \quad (3.33)$$

É possível mostrar que $f_N(t)$ tende a $f(t)$ quando N vai ao infinito, resultando na série de Fourier, mas deixaremos esta demonstração para os próximos capítulos....

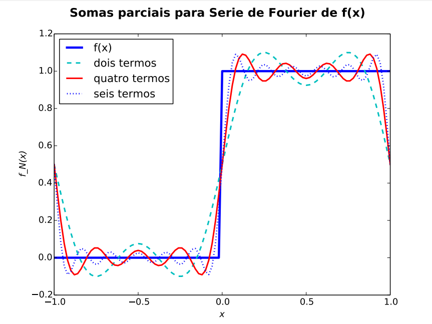
BOX 3.3.1 — SOMA PARCIAL DA SÉRIE DE FOURIER. Observe como se comportam as somas parciais da série de Fourier do exemplo 3.18:

```
#!/usr/bin/python

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-1,1,101)
f=np.ones_like(x)
f[x<0]=0
y1=0.5 + (2/np.pi)*(np.sin(np.pi*x) + np.sin(np.pi*3.0*x)/3.0)
y2=y1+(2/np.pi)*(np.sin(np.pi*5.0*x)/5.0 + np.sin(np.pi*7.0*x)/7.0)
y3=y2+(2/np.pi)*(np.sin(np.pi*9.0*x)/9.0 + np.sin(np.pi*11.0*x)/11.0)

plt.plot(x,f,'b-',lw=3,label='f(x)')
plt.plot(x,y1,'c--',lw=2,label='dois termos')
plt.plot(x,y2,'r-',lw=2,label='quatro termos')
plt.plot(x,y3,'b:',lw=2,label='seis termos')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('x',style='italic')
plt.ylabel('f_N(x)',style='italic')
plt.suptitle('Somas parciais para Serie de Fourier de f(x)', size=16, ...
    weight='bold')
plt.show()
```



Exercício 3.7 Seja $f: [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$. Mostre que:

a $e^{i2\pi nt/T}e^{i2\pi mt/T} = 0$ se $m \neq n$;

b $\langle f, g\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)dt$ satisfaz as propriedades de distributividade($\langle f+h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle$), associatividade ($\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$) e positividade ($\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$);

c $f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i2\pi nt/T}$, onde $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i2\pi nt/T}dt$

d $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ (Teorema de Parseval)