



Já que $\cos(\alpha + 2\pi m) = \cos(\alpha)$, para qualquer inteiro m , fazendo $a_1 T = 2\pi m$ e $a_2 T = 2\pi n$, onde m e n são números inteiros, obtemos

$$T = \frac{2\pi m}{a_1} = \frac{2\pi n}{a_2} \tag{4.4}$$

Logo, $f(t)$ só será periódica se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{n} \tag{4.5}$$

Isto é, se a razão a_1/a_2 , for um número racional, f é periódica. Caso contrário, f não é. ■

4. Análise Espectral

O processamento de sinais digitais ganhou grande destaque nos últimos anos no campo da geofísica. Nos variados métodos de aquisição, as ferramentas de processamento desempenham um papel importante na análise e interpretação dos dados adquiridos. Entre as ferramentas do processamento, destaca-se a representação de sinais por Fourier. Esta representação permite passar um dado do domínio do tempo para o domínio da frequência, o que fornece uma estrutura para a determinação ou reconstrução de aspectos obscuros do sinal.

O objetivo deste capítulo é introduzir as Séries de Fourier e as Transformadas de Fourier, que são as formas básicas da representação de Fourier para funções periódicas e aperiódicas.

Definição 4.0.3 Uma função é periódica para qualquer função $f(t)$ real ou complexa de argumento real t , se e somente se:

$$f(t) = f(t + T) \tag{4.1}$$

para todo t . T é um real arbitrário e uma constante positiva. A Equação 4.1 deve satisfazer para diferentes valores de T . O menor valor de T é conhecido como *período fundamental*, e $1/T$ é chamado de *frequência fundamental*. Qualquer função que não satisfazer a equação 4.1 para nenhum T é chamada de aperiódica.

■ **Exemplo 4.1** Uma soma de duas funções periódicas não é necessariamente uma função periódica. Como exemplo, considere a seguinte função:

$$f(t) = \cos(a_1 t) + \cos(a_2 t) \tag{4.2}$$

Observe que f é a soma de duas funções periódicas. No entanto, de acordo com equação 4.1, para $f(t)$ para ser periódica com período T , deve-se satisfazer a seguinte relação:

$$\cos(a_1 t) + \cos(a_2 t) = \cos(a_1 (t + T)) + \cos(a_2 (t + T)) \tag{4.3}$$

BOX 4.0.2 — FUNÇÕES PERIÓDICAS. Programa para mostrar que nem sempre a soma de duas funções periódicas é também periódica.

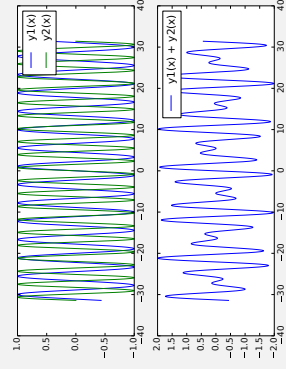
```
#!/usr/bin/python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-np.pi*10, np.pi*10, 1001)

a1 = np.sqrt(2)
a2 = 2
y1 = np.sin(a1*x)
y2 = np.sin(a2*x)

y = y1 + y2

plt.subplot(211)
plt.plot(x, y1, label="y1(x)")
plt.plot(x, y2, label="y2(x)")
plt.legend()
plt.subplot(212)
plt.plot(x, y, label="y1(x) + y2(x)")
plt.legend()
plt.show()
```



No gráfico acima estão plotados os gráficos das funções $y_1(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x)$ e $y_2(x) = \text{sen}(2x)$. Abaixo, o gráfico da soma $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. Observe que, como a razão $\sqrt{2}/2$ não é racional, a soma não é periódica.

O conceito de representação de Fourier de um determinado sinal envolve a noção de frequência. Para sinais periódicos, é fácil intuir esta noção. Vamos tomar como base para as próximas definições a função cosseno dada por:

$$u(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \phi\right). \quad (4.6)$$

Definição 4.0.4 — Frequência. A frequência é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, oscilações etc) em um determinado intervalo de tempo. A frequência da função cosseno em (4.10), é o inverso do período T :

$$f = \frac{1}{T}. \quad (4.7)$$

O período T é tempo decorrido para uma oscilação. A frequência f indica quantos períodos completos T existem no intervalo de tempo entre 0 e 1 segundo. A unidade de medida para a frequência é o inverso da unidade de tempo. No SI, a unidade usada é o hertz ($H_z = 1/s$), em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz.

Definição 4.0.5 — Frequência Angular. Representada usualmente por ω , a frequência angular é a unidade usada para encurtar a expressão em (4.10):

$$\omega = 2\pi f, \quad (4.8)$$

logo

$$u(t) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (4.9)$$

Definição 4.0.6 — Fase. A fase ϕ caracteriza a posição inicial da onda cosseno no tempo $t = 0$. Isto é, a fase indica o quanto a onda cosseno é deslocada em relação à onda referência

$$u(t) = A \cos(\omega t). \quad (4.10)$$

■ **Exemplo 4.2** Considere o sinal

$$u(t) = A \cos[2\pi f(t - t_0)] = A \cos(2\pi f t - \phi) \quad (4.11)$$

onde $\phi = 2\pi f t_0$.

O sinal foi deslocado em ϕ radianos, ou t_0 segundos (por exemplo, deslocar $\phi = \pi/2$ em fase é o mesmo que deslocar $t_0 = T/4$ em tempo. Observe que

$$-\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (4.12)$$

$$-\frac{T}{2} \leq t_0 \leq \frac{T}{2}. \quad (4.13)$$

■ **Definição 4.0.7 — Sinais.** Um sinal é uma função que representa uma quantidade ou variável física, e tipicamente contém informações sobre o comportamento ou natureza deste fenômeno. É uma função que mapeia um domínio em um intervalo, geralmente uma medida física, como a intensidade de uma onda acústica, ou o magnetismo. A maior parte dos sinais medidos na natureza são funções de variáveis contínuas, como o tempo ou espaço, e assumem valores em intervalos também contínuos.

Por exemplo, um sinal sísmico é uma medida da movimentação da terra, que é por natureza, uma grandeza contínua.

■ **Exemplo 4.3** Sinais discretos e contínuos

■ **Exemplo 4.4** Sinais pares e ímpares

■ **Definição 4.0.8 — Sistemas.** Um sistema é um dispositivo físico que opera em um sinal. Um filtro, por exemplo, é um sistema. Matematicamente, dizemos que um sistema é uma função que mapeia um sinal do domínio em um sinal da imagem. Ou seja, um sistema é uma função cujos domínio e imagem são também funções.

■ **Exemplo 4.5** Sísmica e sismologia

BOX 4.0.3 — BASE ORTONORMAL DO ESPAÇO DE SINAIS: UMA ANALOGIA AO ESPAÇO VETORIAL. É fato conhecido que o conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base ortonormal do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Qualquer vetor \mathbf{x} neste espaço pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (x_2, \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (x_3, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3, \quad (4.14)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar, definido no Capítulo 3.

Esta regra não é aplicável apenas aos espaços cartesianos; é válida para qualquer espaço vetorial desde que seja possível definir um produto escalar neste espaço. Nós vimos na Seção 3.2 que para o espaço das funções quadrado integráveis no intervalo $[a, b]$, é possível definir o produto escalar como:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad (4.15)$$

onde f e g são duas funções (ou sinais), definidas no intervalo $[a, b]$.

Sabemos do Capítulo 3 que um conjunto de vetores é ortonormal quando

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0, \text{ sempre que } i \neq j, \quad (4.16)$$

e

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 1, \text{ sempre que } i = j. \quad (4.17)$$

Analogamente, podemos definir uma base ortonormal para um espaço de sinais. Qualquer conjunto de sinais

$$e_0(t), e_1(t), \dots, e_n(t), \dots \quad (4.18)$$

que obedeça

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_a^b e_n(t) e_m(t) dt = 0, n \neq m; n, m = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

e

$$\langle e_n(t), e_n(t) \rangle = \int_a^b e_n(t)^2 dt = 1, n = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

é uma base ortonormal para o espaço de sinais quadrado integráveis.

Com uma base ortonormal definida, qualquer sinal quadrado integrável no intervalo $[a, b]$, digamos $u(t)$, pode ser expresso como uma combinação linear de sinais que constituem a base ortonormal:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u(t), e_n(t) \rangle e_n(t). \quad (4.21)$$

Com a analogia apresentada no BOX 4.0.3, introduziremos o conceito das Séries de Fourier.

4.1 Séries de Fourier

Para o desenvolvimento das séries de Fourier, concentraremos nas representações de sinais periódicos.

Considere um espaço, digamos U , de sinais periódicos de período T . Podemos definir neste espaço o produto escalar de dois sinais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ em U como

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_0^T u_1(t) u_2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} u_1(t) u_2(t) dt. \quad (4.22)$$

O próximo passo é construir uma base ortonormal de funções periódicas com período T , que pode ser usada para representar qualquer sinal de U . A ideia é encontrar um conjunto de sinais simples que possam ser utilizados para reconstruir os sinais mais complexos. Arriscamos dizer que as funções seno e cosseno são as funções mais simples do espaço U . O seguinte conjunto constitui uma base ortonormal de U (verifique!):

$$B = \sqrt{\frac{2}{T}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{sen} \frac{2\pi t}{T}, \text{cos} \frac{4\pi t}{T}, \text{sen} \frac{4\pi t}{T}, \text{cos} \frac{6\pi t}{T}, \dots, \text{sen} \frac{2n\pi t}{T}, \text{cos} \frac{2n\pi t}{T}, \dots \right\} \quad (4.23)$$

Desta forma, qualquer função periódica u de período T pode ser escrita unicamente como uma combinação linear dos elementos da base de U :

$$u(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \langle u(t), e_l(t) \rangle e_l(t) \quad (4.24)$$

ou em outras palavras

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{cos} \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{2\pi n t}{T} \right), \quad (4.25)$$

onde

$$a_0 = 2 \langle u(t), e_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt, \quad (4.26)$$

$$a_n = 2 \langle u(t), e_{2n} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \text{cos} \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt, \quad (4.27)$$

e

$$b_n = 2 \langle u(t), e_{2n-1} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \text{sen} \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt. \quad (4.28)$$

A quantidade $f_1 = \frac{1}{T}$ é chamada de *frequência fundamental* de u . A soma dada pela Eq. 4.25 é chamada de *Série de Fourier*.

Exercício 4.1 Considere $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t$.

- Estenda f convenientemente para o intervalo $[-1, 1]$ para encontrar a série de Fourier em senos de f (isto é, $a_n = 0$ para qualquer n).
- Estenda f convenientemente para o intervalo $[-1, 1]$ para encontrar a série de Fourier em cossenos de f (isto é, $b_n = 0$ para qualquer n).

Relembrando a relação de Euler

$$e^{i\theta} = \text{cos}(\theta) + i \text{sen}(\theta), \quad (4.29)$$

podemos estender o resultado (4.25) para os complexos:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i 2\pi n t}{T}}, \quad (4.30)$$

onde

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2}, & \text{se } n \geq 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2}, & \text{se } n < 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

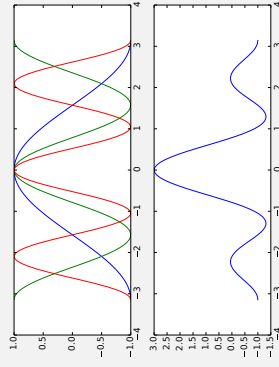
BOX 4.1.1 — UM SINAL COMO SOMA DE SENOS E COSSENOS. As séries de Fourier nos permite representar um sinal como uma soma de senos e cossenos. O script abaixo constrói um sinal simples, formado pela soma de três senos:

```
#!/usr/bin/python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t = np.linspace(-np.pi, np.pi, 101)
f = np.pi/4

y1 = np.sin(t + f)
y2 = np.sin(2*t + f)
y3 = np.sin(3*t + f)

Y = y1 + y2 + y3

plt.subplot(211)
plt.plot(t, y1, t, y2, t, y3)
plt.legend()
plt.subplot(212)
plt.plot(t, Y)
plt.show()
```



No gráfico acima estão plotados os gráficos das funções $y_1(t) = \sin(t + \pi/2)$, $y_2(t) = \sin(2t + \pi/2)$ e $y_3(t) = \sin(3t + \pi/2)$. Abaixo, o gráfico da soma $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$. Experimente trocar o valor da fase f e veja como o sinal $y(t)$ se comporta!

- **Exemplo 4.6** A Figura 4.1 mostra como uma wavelet se comporta em variadas rotações de fase. A Figura 4.2 mostra uma porção de uma seção sísmica com aplicação de diferentes rotações de fase. Note a mudança nas características de onda dos horizontes mais destacados. Estas diferenças provocadas pelas diferentes rotações de fase são úteis para marcar eventos na fase de interpretação. Um erro comum na interpretação sísmica, é a comparação de duas seções com fases opostas. ■

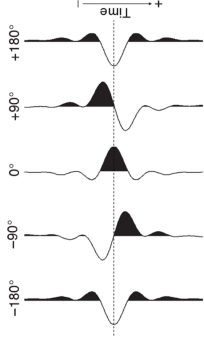


Figura 4.1: Rotações de fase de uma wavelet de fase zero em incrementos de 90° . Observe que para uma rotação de 90° a wavelet se torna assimétrica, e com 180° , há uma inversão de fase.

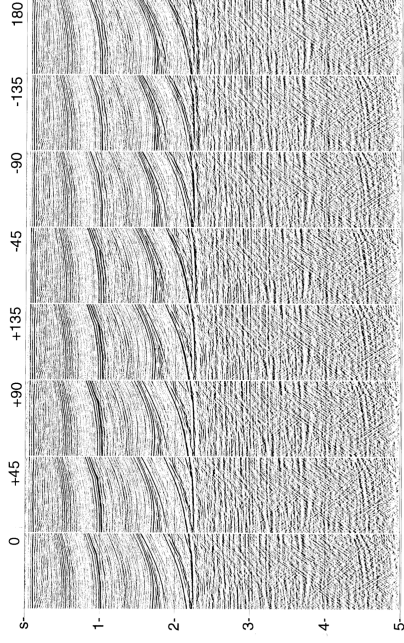


Figura 4.2: Um pedaço de uma seção sísmica com diferentes graus de rotação de fase. (retirado de Yilmaz)

4.2 O espectro de uma função

Definição 4.2.1 — Espectro de uma função. O espectro de amplitude (ou de fase) de uma função f é o gráfico das amplitudes (ou fases) em função das respectivas frequências. Isto é, é a representação da função no domínio das frequências. Podemos definir como o conjunto de pares $(\omega_n, |c_n|)$, onde c_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier, e ω_n é a frequência de f em um determinado n .

A ideia da Série de Fourier é representar um sinal sísmico como uma soma de senos e cossenos. A dicionar cossenos produz um sinal cujas características dependem da frequência, amplitude e fase de cada onda cosseno individual. A Figura 4.3, por exemplo, mostra a soma de duas funções cosseno com fase, amplitude e frequência distintas, a saber, fases 0 e -90° , amplitudes 2 e 1 e frequências 10Hz e 20Hz respectivamente. A soma resultante é um sinal cujo espectro mostrará na frequência 10Hz , amplitude igual a 2 e fase igual a 0 , e na frequência 20Hz , amplitude igual a 1 e fase igual a -90° .

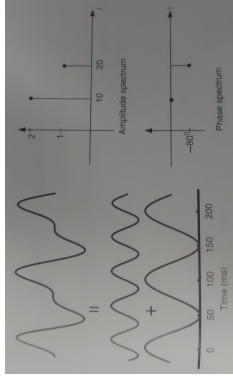


Figura 4.3: Forma de onda e espectro da soma de duas ondas cosseno.

4.3 Transformada de Fourier

Conforme apresentado na seção anterior, qualquer sinal periódico pode ser representado no domínio de Fourier por um espectro de amplitude ou de fase. Nesta seção, nosso objetivo é estabelecer uma relação matemática conhecida como *Transformada de Fourier*, que permite passar uma função em tempo para seu domínio na frequência, e vice versa. Primeiramente mostraremos para os sinais periódicos, e em seguida vamos generalizar para sinais aperiódicos. Seja f periódica de período T , seccionalmente contínua. Sua série de Fourier é dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right). \tag{4.32}$$

Vamos substituir $\frac{2\pi}{T}$ por $\Delta\omega$ e $n\Delta\omega$ por ω_n , o que nos dará uma expressão para a eq. (4.32) parecida com uma soma de Riemann:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau. \tag{4.33}$$

1 Integral de Riemann: Lembre-se que

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N g(n \cdot \Delta x + a) \Delta x \tag{4.34}$$

Se imaginarmos que uma função aperiódica pode ser interpretada como uma função periódica cujo período T é infinito, observamos que no limite $T \rightarrow \infty$, temos $\Delta\omega \rightarrow 0$, o que nos dá

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega, \tag{4.35}$$

onde $\hat{f}(\omega)$ é dado por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{4.36}$$

Definimos a Equação 4.36 como a *Transformada de Fourier*, e a Equação 4.35 como sua inversa.

A Transformada de Fourier converge para qualquer função em L^1 , com $\lim_{T \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \tag{4.37}$$

Vejamos agora alguns exemplos:

■ **Exemplo 4.7** Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{se } -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.38}$$

Pela definição 4.36, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{2A}{\omega} \frac{\text{sen}(\omega a)}{\omega a}. \tag{4.39}$$

Sabemos que a função *sinc*(t) é definida por $\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$ se $t \neq 0$, e igual a 1 se $t = 0$. Podemos então pensar no problema contrário: e se $h(t) = \text{sinc}(t)$? Qual seria sua transformada?

Sabendo que $\hat{f}(\omega) = 2Aa \frac{\text{sen}(\omega a)}{\omega a}$, temos que $h(t) = \hat{g}(t)$, onde g é a Transformada de Fourier de

$$g(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{se } -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.40}$$

Utilizando a definição da inversa da Transformada de Fourier 4.35, temos que $\hat{h}(\omega) = 2\pi g(-\omega)$, que é uma função *banda limitada*.

■ **Exemplo 4.8** Encontre a Transformada de Fourier da função

$$f(t) = e^{-a|t|} \tag{4.41}$$

com $a > 0$.

Pela definição 4.36, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \tag{4.42}$$

4.4 Transformada de Fourier e Derivadas

Uma das propriedades mais interessantes da Transformada de Fourier, é que operações complicadas no domínio do tempo podem se tornar operações simples no domínio da frequência. É o caso das derivadas. Considere por exemplo $g(t) = f'(t)$ e $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt$, onde $f \in \mathcal{L}^2$. Integrando por partes, tem-se que

$$u = e^{-j\omega t}, du = -j\omega e^{-j\omega t} dt, dv = f'(t) dt, v = f(t),$$

logo

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt = \\ &= e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Por definição, $\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt$, e a primeira parte da Eq.4.43 é igual a zero. Logo,

$$\hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega). \tag{4.44}$$

4.5 Delta de Dirac

Para iniciar este assunto, tratemos a seguinte pergunta motivacional:

BOX 4.5.1 Qual é a “função” cuja Transformada de Fourier é a função constante unitária?

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} = \delta(t) \tag{4.45}$$

Isto é, espera-se que a função cuja Transformada de Fourier é igual a $\hat{f}(\omega) = 1$ seja uma função tal que, quando $t = 0$, a função assuma um valor infinito, e quando $t \neq 0$, a função seja igual a zero (estude os Valores Principais de Cauchy para entender porque estamos assumindo $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = 0$, quanto $t \neq 0$). Formalmente, uma função não pode assumir estes valores. A Delta de Dirac $\delta(t)$ é uma distribuição (generalização de função), isto é, um operador linear contínuo em um espaço de funções que associa cada função a um escalar.

A função delta de Dirac, também conhecida como função δ , rigorosamente falando, não é uma função. Na matemática, a Delta é uma distribuição na reta real, a qual vale infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. Uma de suas características é a de que sua em toda reta é definida como tendo valor 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{4.46}$$

A Delta de Dirac foi introduzida pelo físico teórico Paul Dirac em 1930, em seu livro “The Principles of Quantum Mechanics”. No domínio discreto, utiliza-se como análogo o delta de Kronecker, o qual vale 0 em todos os pontos e 1 na coordenada equivalente ao 0.

Pode-se pensar na Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual a 1 (Figura 4.4). Em muitos casos, pode ser encarada como o limite de funções que tendem a estas condições. No contexto de processamento de sinais, a Delta de Dirac é frequentemente interpretada como um impulso unitário.

Matematicamente, a Delta de Dirac não pode ser caracterizada propriamente como uma função. Isso porque qualquer função que valha zero em todos os pontos exceto um, sua integral em toda a reta, no sentido de Riemann, deve ser nula, e a integral da Delta de Dirac em toda reta é igual a 1. Em outras palavras, dizemos que a Delta de Dirac é uma *distribuição*, isto é, é um operador linear contínuo em um espaço de funções, que associa cada função a um escalar.

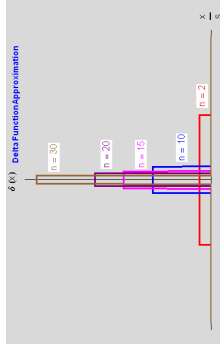


Figura 4.4: Delta de Dirac como o limite de uma função caixa, cuja base é infinitamente pequena, e altura infinitamente grande.

4.5.1 Definição

Para definir matematicamente a função Delta de Dirac, é conveniente utilizar outra função singular, a chamada função de Heaviside, também conhecida por função salto ou degrau. Considere-se o Delta como o limite de funções pulso unitário $f_\epsilon(t)$, num curto intervalo de tempo $[-\epsilon, \epsilon]$, quando o parâmetro ϵ tende a zero:

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} [u(t+\epsilon) - u(t-\epsilon)] = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} \tag{4.47}$$

Para representar um impulso num instante de tempo que não zero, realiza-se um deslocamento na equação anterior:

$$f_\epsilon(t-a) = \frac{1}{2\epsilon} [u(t-(a-\epsilon)) - u(t-(a+\epsilon))] = \begin{cases} 0 & t < a-\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & a-\epsilon < t < a+\epsilon \\ 0 & t > a+\epsilon \end{cases} \tag{4.48}$$

Observa-se que as áreas dos retângulos formados pelas funções pulso unitário $f_\epsilon(t)$ valem 1 independentemente do valor de ϵ . Ou seja:

$$A = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f_\epsilon(t-a) dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = 1 \tag{4.49}$$

Assim, considerando que quando $\epsilon \rightarrow 0$ $f_\epsilon(t-a) \rightarrow \infty$, define-se a função Delta de Dirac como sendo

$$\delta(t-a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t-a) \tag{4.50}$$

A função Delta de Dirac pode também ser definida em termos de outras funções com propriedades análogas. Por exemplo:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t^2}{\epsilon}}}{\epsilon \sqrt{\pi}} \tag{4.51}$$

Resumidamente, pode se escrever:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.53)$$

4.5.2 Propriedades

Propriedade da Peneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt = f(a). \quad (4.54)$$

Observe que $\delta(t-a)$ é nula quando $t \neq a$, então os limites de integração podem ser alterados para $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$. E como $f(t)$ é contínua em $t = a$, seu valor neste intervalo não será muito diferente de $f(a)$. Pode-se dizer que aproximadamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a)f(t) dt \approx f(a) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a) dt = f(a) \quad (4.55)$$

Uma consequência imediata é que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.56)$$

4.5.3 Transformada de Fourier da Delta de Dirac

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega a} \quad (4.57)$$