A Transformada de Fourier converge para qualquer função em L^1, com $lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$:

$$|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty. \tag{4.37}$$

Vejamos agora alguns exemplos:

■ **Exemplo 4.7** Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{, se } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases} \tag{4.38}$$

Pela definição 4.36, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = A\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} = A\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega t}|_{-a}^{a} = \frac{2A}{\omega} sen(\omega a) = 2Aa\frac{sen(\omega a)}{\omega a}. \tag{4.39}$$

Sabemos que a função $sinc(t)$ é definida por $\dfrac{sen(\pi t)}{\pi t}$ se $t \neq 0$, e igual a 1 se $t = 0$. Podemos então pensar no problema contrário: e se $h(t) = sinc(t)$? Qual seria sua transformada?

Sabendo que $\hat{f}(\omega) = 2Aa\frac{sen(\omega a)}{\omega a}$, temos que $h(t) = \hat{g}(t)$, onde $\hat{g}$ é a Transformada de Fourier de

$$g(\omega) = \begin{matrix} 1/2\pi & \text{, se } -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{matrix} \tag{4.40}$$

Utilizando a definição da inversa da Transformada de Fourier 4.35, temos que $\hat{h}(\omega) = 2\pi g(-\omega)$, que é uma função *banda limitada*. ■

■ **Exemplo 4.8** Encontre a Transformada de Fourier da função

$$f(t) = e^{-a|t|} \tag{4.41}$$

com $a > 0$.

Pela definição 4.36, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{at}e^{-i\omega t}dt = \frac{2a}{a^2+\omega^2}. \tag{4.42}$$

■

4.4 Transformada de Fourier e Derivadas

Uma das propriedades mais interessantes da Transformada de Fourier, é que operações complicadas no domínio do tempo podem se tornar operações simples no domínio da frequência. É o caso das derivadas. Considere por exemplo $g(t) = f'(t)$ e $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt$, onde $f \in \mathscr{L}^2$.

Integrando por partes, tem-se que

$$u = e^{-i\omega t}, du = -i\omega e^{-i\omega t}dt, dv = f'(t)dt, v = f(t),$$

logo

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt =$$

$$= e^{-i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt. \tag{4.43}$$

Por definição, $\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt$, e a primeira parte da Eq.4.43 é igual a zero. Logo,

$$\hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega). \tag{4.44}$$

4.5 Delta de Dirac

Para iniciar este assunto, traremos a seguinte pergunta motivacional:

> **BOX 4.5.1** Qual é a "função" cuja Transformada de Fourier é a função constante unitária?
>
> $$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} = \delta(t) \tag{4.45}$$
>
> Isto é, espera-se que a função cuja Transformada de Fourier é igual a $\hat{f}(\omega) = 1$ seja uma função tal que, quando $t = 0$, a função assuma um valor infinito, e quando $t \neq 0$, a função seja igual a zero (estude os Valores Principais de Cauchy para entender porque estamos assumindo $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = 0$, quanto $t \neq 0$). Formalmente, uma função não pode assumir estes valores. A Delta de Dirac $\delta(t)$ é uma distribuição (generalização de função), isto é, um operador linear contínuo em um espaço de funções que associa cada função a um escalar.

A função delta de Dirac, também conhecida como função δ, rigorosamente falando, não é uma função. Na matemática, a Delta é uma distribuição na reta real, a qual vale infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. Uma de suas características é a de que sua em toda reta é definida como tendo valor 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{4.46}$$

A Delta de Dirac foi introduzida pelo físico teórico Paul Dirac em 1930, em seu livro ''The Principles of Quantum Mechanics". No domínio discreto, utiliza-se como análogo o delta de Kronecker, o qual vale 0 em todos os pontos e 1 na coordenada equivalente ao 0.

Pode-se pensar na Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual a 1 (Figura 4.4). Em muitos casos, pode ser encarada como o limite de funções que tendem a estas condições. No contexto de processamento de sinais, a Delta de Dirac é frequentemente interpretada como um impulso unitário.

Matematicamente, a Delta de Dirac não pode ser caracterizada propriamente como uma função. Isso porque qualquer função que valha zero em todos os pontos exceto um, sua integral em toda a reta, no sentido de Riemman, deve ser nula, e a integral da Delta de Dirac em toda reta é igual a 1. Em outras palavras, dizemos que a Delta de Dirac é uma *distribuição*, isto é, é um operador linear contínuo em um espaço de funções, que associa cada função a um escalar.

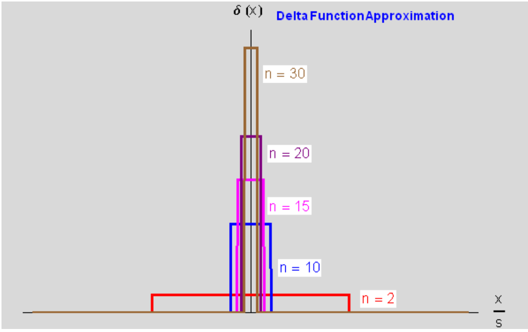

Figura 4.4: Delta de Dirac como o limite de uma função caixa, cuja base é infinitamente pequena, e altura infinitamente grande.

4.5.1 Definição

Para definir matematicamente a função Delta de Dirac, é conveniente utilizar outra função singular, a chamada função de Heaviside, também conhecida por função salto ou degrau. Considera-se o Delta como o limite de funções pulso unitário $f_\varepsilon(t)$, num curto curto intervalo de tempo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, quando o parâmetro ε tende a zero:

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}[u(t+\varepsilon) - u(t-\varepsilon)] = \begin{cases} 0 & t < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \tag{4.47}$$

Para representar um impulso num instante de tempo que não zero, realiza-se um deslocamento na equação anterior:

$$f_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{2\varepsilon}[u(t-(a-\varepsilon)) - u(t-(a+\varepsilon))] = \begin{cases} 0 & t < a-\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & a-\varepsilon < t < a+\varepsilon \\ 0 & t > a+\varepsilon \end{cases} \tag{4.48}$$

Observa-se que as áreas dos retângulos formados pelas funções pulso unitário $f_\varepsilon(t)$ valem 1 independentemente do valor de ε. Ou seja:

$$A = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f_\varepsilon(t-a)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1 \tag{4.49}$$

Assim, considerando que quando $\varepsilon \to 0 \quad f_\varepsilon(t-a) \to \infty$, define-se a função Delta de Dirac como sendo

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t-a) \tag{4.50}$$

A função Delta de Dirac pode também ser definida em termos de outras funções com propriedades análogas. Por exemplo:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \tag{4.51}$$

Resumidamente, pode se escrever:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases} \tag{4.52}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{4.53}$$

4.5.2 Propriedades

Propriedade da Peneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)f(t)dt=f(a). \tag{4.54}$$

Observe que $\delta(t-a)$ é nula quando $t\neq a$, então os limites de integração podem ser alterados para $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$. E como $f(t)$ é contínua em $t=a$, seu valor neste intervalo não será muito diferente de $f(a)$. Pode-se dizer que aproximadamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)f(t)dt=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(t-a)f(t)dt\approx f(a)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(t-a)dt=f(a) \tag{4.55}$$

Uma consequência imediata é que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1. \tag{4.56}$$

4.5.3 Transformada de Fourier da Delta de Dirac

$$\mathscr{F}[\delta(t-a)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega a} \tag{4.57}$$