5. Convolução

Convolução é um operador linear que, a partir de duas funções dadas, resulta numa terceira que mede a área subentendida pela superposição das mesmas em função do deslocamento existente entre elas.

Ela é definida como a integral do produto de uma das funções por uma cópia deslocada e invertida da outra; a função resultante h depende do valor do deslocamento. Se x for a variável independente e u, o deslocamento, a fórmula pode ser escrita como:

Definição 5.0.1 — Convolução.

$$(f * g)(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u)du \tag{5.1}$$

Note-se que $h(x)$ depende de $f(x)$ e de $g(x)$ mas, para calcular $h(x1)$, não basta conhecer $f(x1)$ e g$(x1)$; é preciso conhecer os valores de $f(x)$ e de $g(x)$ em todo o intervalo $-\infty < x < \infty$.

BOX 5.0.2 — Propriedades 1. **1a)** *Comutatividade*: $f * g = g * f$
1b) *Associatividade*:$f * (g * h) = (f * g) * h$
1c) *Distributividade*: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
1d) *Associatividade com multiplicação escalar*: $c(f * g) = (cf) * g = f * (cg) | c \in \mathbb{C}$
1e) *Transformada de um produto de convolução*: $\mathscr{F}\{f(x) * g(x)\} = \mathscr{F}\{f(x)\} \cdot \mathscr{F}\{g(x)\}$
1f) $\mathscr{F}\{f(x) \cdot g(x)\} = \mathscr{F}\{f(x)\} * \mathscr{F}\{g(x)\}$

Obs: Versões das propriedades $1e)$ e $1f$ também valem para a transformada de Laplace, a transformada bi-lateral de Laplace, a transformada Z, a transformada de Mellin e outras.

■ **Exemplo 5.1** Vamos mostrar a propriedade $1e$:

$$(f \hat{*} g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \right) e^{-i\omega t}dt \tag{5.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega(x+y)} dy \right) dx \tag{5.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \hat{g}(\omega) dx = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \tag{5.4}$$

■

■ **Exemplo 5.2** Suponha que f seja um sinal contínuo, obtido de uma medição cheia de ruídos. Uma maneira de encontrar $\tilde{f}$ suavizada, é realizar no domínio contínuo uma operação similar à média aritmética no domínio discreto:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x) dx. \tag{5.5}$$

A Equação 5.5 pode ser escrita como

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x,t) dx, g(x,t) = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{cases} 0, & |t-x| > \varepsilon \\ 1, & |t-x| < \varepsilon \end{cases}. \tag{5.6}$$

■

BOX 5.0.3 — Propriedades 2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $\mu(t)$ a função degrau:

2a) $f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx = f(t)$;

2b) $f(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu(t-x)dx = \int_{-\infty}^{t} f(t)dx$;

2c) $\mu(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(x)dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$;

Exercício 5.1 Compute as seguintes convoluções:

(a) $f * f$ para $f(t) = \mu(1-|t|)$;

(b) $g * g$ para $g(t) = e^{-\pi t^2}$;

(c) $f * g$ para $f(t) = \mu(t)(1-t)$ e $g(t) = \mu(t)e^t$.

■

Exercício 5.2 Se $f: \mathbb{R} \to Re$. Definimos $f^{[m]}$ como a convolução repetida m vezes $f^{[m]} = f * f * \cdots f$.

(a) Escreva $\mathscr{F}\{f^{[m]}\}(\omega)$ em termos de $\mathscr{F}\{f\}$.

(b) Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} f^{[m]}(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \right]^m$.

(c) Como seria possível definir $f^{[p]}$ para qualquer p real e positivo?

(d) Tente interpretar $f^{[1/2]}$.

■

Exercício 5.3 Mostre que $\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t-a-b)$. ■