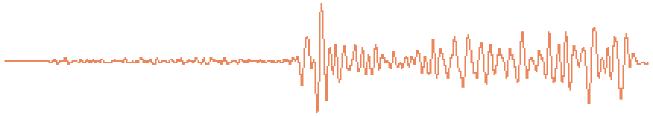

2. Introdução às variáveis complexas

A representação matemática dos sinais geofísicos se dá na forma de números complexos. O objetivo deste capítulo é introduzir algumas notações básicas que utilizaremos ao longo do material.

2.1 Motivação

Os números complexos aparecem quando é preciso resolver uma equação do tipo

$$x^2+1=0. \tag{2.1}$$

Vemos que não existe nenhum número real que satisfaz esta equação, portanto faz-se necessário estender o conjunto dos reais a um conjunto maior na qual a equação anterior tenha solução. Assumindo que podemos aplicar raiz quadrada em 2.1 obtemos que

$$x=\sqrt{-1}, \tag{2.2}$$

o que não faz sentido no conjunto dos números reais. Denotaremos a expressão $\sqrt{-1}$ por i, chamada também de unidade imaginária. i, portanto, é um número que elevado ao quadrado, é igual a -1.

Definição 2.1.1 — Unidade Imaginária. $i^2=-1$

Exercício 2.1 Sabendo que i é a unidade imaginária, calcule:
a) i^2
b) i^3
c) i^4
d) i^5
e) i^6

■

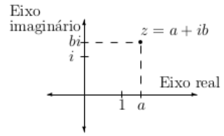

Figura 2.1: Representação gráfica do plano complexo.

O novo conjunto que contém os números reais e a unidade imaginária será denotado por $\mathbb{C}$, o qual será chamado de o conjunto dos *números complexos*.

É necessário que este conjunto preserve as propriedades aritméticas dos números reais, isto é, o produto e a soma de dois elementos de $\mathbb{C}$ também deverão pertencer a $\mathbb{C}$. A extensão natural dos números reais é

$$\mathbb{C}=\{z=a+ib: a,b\in\mathbb{R}\},\text{ onde}\begin{cases} a & = Re(z)\text{ (ou parte real de } z\text{)},\\ b & = Im(z)\text{ (ou parte imaginária de } z\text{)}.\end{cases} \tag{2.3}$$

Observe que o conjunto dos números reais está contido em $\mathbb{C}$, uma vez que qualquer número real $r\in\mathbb{R}$ pode ser escrito como $r=r+i0$.

A soma e a multiplicação de dois números complexos, $z_1=a_1+ib_1$ e $z_2=a_2+ib_2$ se dão pelas seguintes operações:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2); \tag{2.4}$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1). \tag{2.5}$$

2.1.1 Representação polar

É possível fazer um isomorfismo entre o plano real $\mathbb{R}^2$ e o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, representando cada número complexo $z=a+ib$ por um par ordenado (a,b). Graficamente, em geral, representa-se a parte real no eixo horizontal, e a parte imaginária no eixo vertical (ver Figura 2.1).

Definição 2.1.2 — Complexo conjugado e módulo. Para $z=a+ib$, definimos as seguintes quantidades:
Conjugado - $\bar{z}:=a-ib$
Módulo - $|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$

Exercício 2.2 — Desigualdade triangular. Sejam z e w números complexos. Prove que

$$|z+w|\leq|z|+|w|. \tag{2.6}$$

■

Seja $z \neq 0$, $z = x + iy$ um número complexo. Defina r como a distância de z até a origem do plano complexo ($r = |z|$), e θ o ângulo que z forma com o semieixo real positivo ($\theta = arg(z)$). Observe as seguintes identidades:

$$x = rcos(\theta); \tag{2.7}$$

$$y = rsen(\theta). \tag{2.8}$$

A partir daí, podemos escrever z da seguinte forma:

$$z = x + iy = r[cos(\theta) + isen(\theta)]. \tag{2.9}$$

Chamamos a representação dada pela eq. (2.9) de *Forma Polar de z*.

■ **Exemplo 2.1** Escreva $z = \sqrt{3} + i$ na sua forma polar.
Para isto, calculamos $r = \sqrt{3+1} = 2$, e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = & 2cos(\theta) \\ 1 = & 2sen(\theta), \end{cases} \tag{2.10}$$

de onde segue que $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, para qualquer k inteiro. Se restringirmos θ para o domínio $[-\pi, \pi]$, temos que

$$z = cos(\pi/6) + isen(\pi/6). \tag{2.11}$$

■

Exercício 2.3 Escreva z em sua forma polar:
a) $z = 4 - 2i$
b) $z = 2 + 4i$
c) $z = 3 + 4i$
d) $z = 4 - 3i$

Definição 2.1.3 — Relação de Euler. É dada por

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta) \tag{2.12}$$

Exercício 2.4 Resolva:
a) $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
b) $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

A relação de Euler nos dá uma nova forma de escrever um número complexo em sua forma polar:

$$z = r[cos(\theta) + isen(\theta)] = re^{i\theta}, \tag{2.13}$$

onde $r = |z|$ e $\theta = arg(z)$.

Descrever um sinal em sua forma polar tem a vantagem de deixar explícita sua amplitude, dada por r, e sua fase, dada por θ.

■ **Exemplo 2.2 — Raízes enésimas.** Seja $w \in \mathbb{C}$. As raizes enésimas de w são valores z que satisfazem $z = w^1$, $z = w^{1/2}$, $z = w^{1/3}, \ldots$.

Como um exemplo, vamos encontrar as raízes enésimas $w^{1/n}$ de um número complexo w.

Suponha que z seja uma raiz enésima de w. Então $z^n = w$. A representação polar de z e w são dadas por $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, respectivamente. Logo,

$$z^n \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}. \tag{2.14}$$

Observe que

$$|r^n||e^{in\theta}| = |\rho||e^{i\varphi}| \Rightarrow |r^n| = |\rho| \Rightarrow r = \rho^{1/n}. \tag{2.15}$$

Substituindo, temos

$$e^{in\theta} = e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} cos(n\theta) & = cos(\varphi) \\ sen(n\theta) & = sen(\varphi). \end{cases} \tag{2.16}$$

o que nos dá

$$n\theta = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Logo, as raízes n-ésimas de w são todos os números z_k tais que

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i\theta_k}, \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \tag{2.18}$$

Para determinar unicamente uma raiz n-ésima, é necessário restringir o domínio de θ_k, em geral para $-\pi < \theta_k \leq \pi$. ■

Exercício 2.5 Determine as raizes n-ésimas da unidade, isto é, determine para quais valores de z a equação $z = 1^{1/n}$ é satisfeita.

Exercício 2.6 Seja R um número real positivo. Determine o conjunto de pontos $|z| < R$, e faça um esboço deste conjunto no plano complexo.

Exercício 2.7 Faça um esboço do conjunto de pontos no plano complexo tais que $Re(z) \geq -2$ e $Im(z) < 1$.

Exercício 2.8 Faça um esboço do conjunto de pontos no plano complexo tais que $|Arg(z)| \leq \pi/3$.