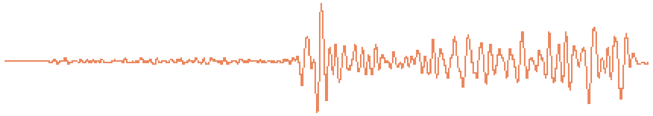


6. Sinal Discreto

Até o momento, estudamos como a Teoria de Fourier funciona em sinais contínuos. Podemos classificar os sinais em três tipos: analógico, discreto e digital. Sinais geofísicos, como sinais sísmicos ou GPR, ocorrem de forma contínua em um dado intervalo de tempo, e portanto podem ser representados por sinais analógicos. O modelo matemático do sinal analógico é uma função definida nos reais. O sinal discreto é uma representação do sinal analógico, assumindo valores somente em pontos isolados. Já os sinais digitais, além de assumirem valores somente em ponto isolados, são também amostras do sinal analógico, ou seja, as amplitudes dos sinais também assumem valores apenas em pontos isolados.

Um sinal discreto é uma função $f_T(t)$ proveniente de uma função real $f(t)$, que consiste de uma sequência de quantidades representados da forma de Deltas de Dirac que coincidem com o valor da função $f(t)$, como mostra a Figura 6.1.

Neste capítulo, estudaremos a Teoria de Fourier em sinais discretos.

6.1 Teorema de Shannon

O Teorema de Shannon, também conhecido como *Teorema da amostragem de Shannon, ou Nyquist-Shannon-Kotelnikov, Whittaker-Shannon-Kotelnikov, Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, WKS*

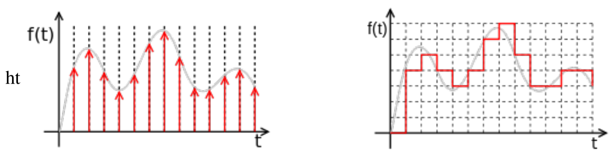


Figura 6.1: Esquerda: Sinal discreto. Direita: Sinal digital. (fonte da imagem: Wikipedia)

etc, é um teorema central para a compreensão da passagem de domínios contínuos para domínios discretos.

Amostrar é o processo no qual se converte um sinal, representado por uma função contínua, no tempo ou no espaço, em uma sequência numérica. Dizemos que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *banda limitada* quando $\hat{f}(\omega)=0$ para $|\omega|>\Omega>0$.

Teorema 6.1.1 — SHANNON. "Seja f um sinal banda-limitada (isto é, $\hat{f}(\omega)=0$ para $\omega>\Omega$), cujo intervalo de tempo foi dividido em partes iguais, onde cada subdivisão compreenda um intervalo com período T segundos, onde T é menor do que $1/2*f_m$ (com $\hat{f}(\omega)\le f_m$). Se uma amostra instantânea é tomada arbitrariamente de cada subintervalo, então o conhecimento da amplitude instantânea de cada amostra somado ao conhecimento dos instantes em que é tomada a amostra de cada subintervalo contém toda a informação do sinal original."

O teorema pode ser demonstrado através da Teoria de Fourier.

Seja f banda limitada (Ω). Então

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{6.1}$$

com $\omega_c>\Omega$.

Escrevendo a expansão em série de Fourier da expressão $e^{i\omega t}$, temos que

$$e^{i\omega t}=g(\omega)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{i\pi/\omega_c n\omega}, \tag{6.2}$$

com

$$c_n=\frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{i\omega t}e^{-i2\pi/2\omega_c n\omega}d\omega. \tag{6.3}$$

Definimos $\frac{\pi}{\omega_c}=\Delta t$, para obter

$$c_n=\frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{i\omega(t-n\Delta t)}d\omega=\frac{1}{2\omega_c}\frac{e^{i\omega(t-n\Delta t)}}{i(t-n\Delta t)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \tag{6.4}$$

$$=\frac{sen(\omega_c(t-n\Delta t))}{\omega_c(t-n\Delta t)}=\frac{sen(\pi/\Delta t(t-n\Delta t))}{\pi/\Delta t(t-n\Delta t)}=sinc\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right), \tag{6.5}$$

onde $sinc(x)$ é a função seno cardinal:

$$sinc(x)=\begin{cases}\frac{sen(\pi x)}{\pi x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases} \tag{6.6}$$

Assim,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\hat{f}(\omega)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{i\omega n\Delta t}\right)d\omega= \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\hat{f}(\omega)e^{i\omega(n\Delta t)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} sinc\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)d\omega \tag{6.8}$$

Voltando os limites da integral da Tranformada Inversa de Fourier para $-\infty$ a ∞, e assumindo que a série converge uniformemente, temos que

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} sinc\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega(n\Delta t)}d\omega \tag{6.9}$$

e portanto

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} sinc\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)f(n\Delta t). \tag{6.10}$$

Note que $\Delta t=\frac{\pi}{\omega_c}$ e $\omega_c>\Omega$.

Em suma, a equação (6.10) nos mostra que, se tivermos infinitas amostras de um sinal com banda limitada Ω, espaçado em intervalos de tempo Δt, podemos reconstruí-lo perfeitamente. Por outro lado, ao amostrar um sinal em intervalos de tempo Δt, já estamos limitando a frequência que poderemos recuperar do sinal em $\frac{\pi}{\Delta t}$.

Definição 6.1.1 — Frequência de Nyquist. É a maior frequência que se pode recuperar do sinal.

$$\omega_c=\frac{\pi}{\Delta t},\omega_c>\Omega,\Delta t<\frac{\pi}{\Omega}. \tag{6.11}$$

O teorema mostra que um sinal analógico, limitado em banda, que foi amostrado, pode ser perfeitamente recuperado a partir de uma sequência infinita de amostras, se a taxa de amostragem for maior que $2f_m$ amostras por segundo, onde f_m é a maior frequência do sinal original. Porém, se um sinal contiver uma componente exatamente em f_m Hertz, e amostras espaçadas de exatamente $1/(2f_m)$ segundos, não se consegue recuperar totalmente o sinal. (Assista como exemplo, ao vídeo https://www.youtube.com/watch?v=Sv5TyYzuLHc para ver o efeito de se amostrar exatamente na frequência de Nyquist)

Observe porém que o teorema assume uma idealização de qualquer situação do mundo real, uma vez que o mesmo só se aplica a sinais que são amostrados em infinitos tempos. Um sinal $x(t)$ limitado em tempo não pode ser perfeitamente limitado em banda. Isto é, a recuperação perfeita do modelo idealizado é matematicamente possível, mas é somente uma aproximação de sinais do mundo real, já que nunca temos um conjunto infinito de amostas de um sinal. Todavia, na prática, a aproximação pelo Teorema de Shannon é em geral uma aproximação muito boa.

O teorema também leva a uma fórmula para a reconstrução do sinal original.

Exercício 6.1 Seja $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\hat{s}(\omega)=0$ para $|\omega|>\Omega>0$. Prove que se $0<\Delta t<\pi/\Omega$ então:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}s(t)^2dt=\Delta t\sum_{n\in\mathbb{Z}}s(n\Delta t)^2$.

(b) Para todo $|\omega|\leq\Omega, \hat{s}(\omega)=\Delta t\sum_{n\in\mathbb{Z}}s(n\Delta t)e^{-in\omega\Delta t}$.

Exercício 6.2 Sejam $x,y:\mathbb{R}\to Re$ tais que $\hat{x}(\omega)=0$ para $|\omega|>\Omega_x>0$ e $\hat{y}(\omega)=0$ para $|\omega|>\Omega_y>0$ e $a\in\mathbb{R}$. Através do Teorema de Shannon, determine o intervalo máximo de amostragem (Δt) para os seguintes sinais:

(a) $x(t+a)$.
(b) $x(at), a\neq 0$.
(c) $x'(t)$.
(d) $\mu(t)*x(t)$.
(e) $x(t)cos(at)$.
(f) $x(t)+y(t)$.
(g) $x(t)\cdot y(t)$.
(h) $x(t)*y(t)$.

BOX 6.1.2 — INTERPOLAÇÃO SINC. Dada uma sequência de números reais $x[n]$, a função contínua

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right), \tag{6.12}$$

onde

$$sinc(x)=\frac{\pi x}{\pi x}$$

possui uma Transformada de Fourier $\hat{x}(\omega)$, cujos valores não nulos limitam-se a um intervalo $|\omega|\leq 1/(2T)$. Quando o parâmetro T é medido em segundos, o limite de banda dado por $1/(2T)$ é medido em ciclos por segundo (Hz). Quando a sequência $x[n]$ representa amostras de tempo, de intervalo T, de uma função contínua, a quantidade $f_s=1/T$ é conhecida como *taxa de amostragem*, e $f_s/2$ é a *frequência de Nyquist* correspondente. Quando a função amostrada possui um limite de banda B, menor do que a frequência de Nyquist, $x(t)$ é uma reconstrução perfeita da função original.

A interpolação dada por 6.12 é conhecida como interpolação sinc, ou interpolação de Whittaker-Shannon.

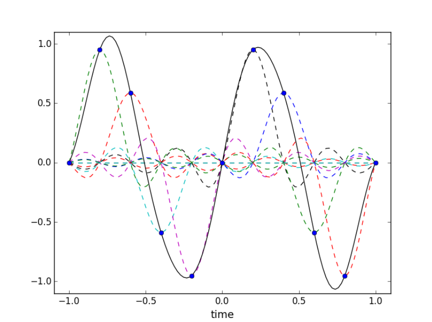
O script abaixo ilustra como a interpolação sinc funciona. A função $sen(2\pi ft)$ é registrada em uma taxa de amostragem dada por f_s. O gráfico em preto ilustra a somatória de todas as funções sinc pontilhadas.

```
#!/usr/bin/python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

f = 1.0   # Hz, sinal de frequencia
fs = 5.0 # Hz, taxa de amostragem (ie. ≥ 2*f)
t = np.linspace(-1,1,100)
ts = np.arange(-1,1+1/fs,1/fs) # pontos da amostras
num_coeffs=len(ts)
sm=0
for k in range(-num_coeffs,num_coeffs):
   sm+=np.sin(2*np.pi*f*(k/fs))*np.sinc( k - fs * t)
```

```
k=np.array(sorted(set((t*fs).astype(int)))) # ordenando a lista de ...
    coeficientes
fig=plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(t,(np.sin(2*np.pi*f*(k[:,None]/fs))*np.sinc(k[:,None]-fs*t)).T...
    ,'--', # funcao individual whittaker
        t,(np.sin(2*np.pi*f*(k[:,None]/fs))*np.sinc(k[:,None]-fs*t))...
            .sum(axis=0),'k-', # interpolacao sinc
     k/fs,np.sin(2*np.pi*f*k/fs),'ob')# amostras
ax.set_xlabel('time',fontsize=14)
ax.axis((-1.1,1.1,-1.1,1.1));


plt.show()
```



A prática do teorema leva ao entendimento do aliasing que ocorre quando o sistema amostrador não satisfaz as condições do teorema.

6.2 Aliasing

Vimos pelo Teorema de Shannon que dois sinais diferentes podem tornar-se indistinguíveis quando amostrados, caso o intervalo de amostragem não seja suficientemente pequeno. Quando isto ocorre, dizemos que um sinal é um *alias* do outro. Também chamamos de *aliasing* o efeito que ocorre quando há distorções ou artefatos que resultam quando a reconstrução de um sinal amostrado é diferente do sinal original contínuo.

Conforme vimos na Seção 4.1, sinais reais podem ser representados pela soma de senoides de diferentes frequências e diferentes amplitudes, através de séries ou transformadas de Fourier. Portanto, para entender o efeito do *aliasing* em um sinal, é importante entender o efeito em senoides.

BOX 6.2.1 — ALIASING. Abaixo mostramos um gráfico de um conjunto de amostras cujo intervalo amostral é de 400 amostras por segundo, e mostramos duas senoides que poderiam ter gerado estas amostras. A frequência amostral neste caso é $f_s = 1/400$. A primeira senoide possui frequência de 60 Hz, e a segunda senoide, de 340 Hz. Estas senoides foram geradas pelas funções $\cos(2\pi 60t)$ e $\cos(2\pi 340t)$.

Em geral, quando uma senoide de frequência f é amostrada a uma taxa f_s, o número de ciclos por amostra é dado por f/f_s. Esta quantidade é conhecida como frequência normalizada. As amostras serão indistinguíveis de outra senoide cuja frequência normalizada difere de f/f_s por um valor inteiro (positivo ou negativo). Todas as senoides que apresentarem esta relação são chamadas de *aliases* da senoide original. No nosso exemplo, temos que $f_s = 400$, $f_1 = 60$ e $f_2 = 340$. A frequência normalizada da primeira senoide é dada por $f_1/f_s = 0,15$, e a frequência normalizada da segunda senoide é dada por $f_2/f_s = 0,85$. Observamos que a soma das duas frequências normalizadas é igual a 1, que é inteiro, e portanto, a segunda senoide é um alias da primeira. De maneira geral, podemos expressar todos os aliases de frequência f como $f_{alias}(N) = |f - Nf_s|$, para $N \in \mathbb{Z}$.

```
#!/usr/bin/python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t=np.arange(0,2./60,1./4000) #Eixo tempo
xa1 = np.cos(2*np.pi*60*t+np.pi/3)
xa2 = np.cos(2*np.pi*340*t+np.pi/3)
xa3 = np.cos(2*np.pi*460*t+np.pi/3)
xa4 = xa1 + xa2
tn=np.arange(0,2./60,1./400) #Eixo tempo discreto
xn1 = np.cos(2*np.pi*60*tn+np.pi/3)
xn2 = np.cos(2*np.pi*340*tn+np.pi/3)
xn3 = np.cos(2*np.pi*460*tn+np.pi/3)
xn4 = xn1 + xn2
fig=plt.figure()
ax1=fig.add_subplot(311)
ax1.plot(t,xa1)
ax1.stem(tn,xn1)
ax2=fig.add_subplot(312)
ax2.plot(t,xa2)
ax2.stem(tn,xn2)
ax3=fig.add_subplot(313)
ax3.plot(t,xa4)
ax3.stem(tn,xn4)
plt.show()
```